Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2012

Concours Mathématiques et Physique
Correction de l'Epreuve de Mathématiques I

Partie -I-

1. (a)

$$a_0(H) = \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi} \frac{\Pi - t}{2} dt = \frac{1}{2\Pi}[-\frac{(\Pi-t)^2}{2}]_0^{2\Pi} = 0,$$

$$\forall n \geq 1\ a_n(H) = \frac{1}{\Pi}\int_0^{2\Pi} \frac{\Pi - t}{2}\cos(nt)dt = \frac{1}{\Pi}([\frac{(\Pi-t)}{2n}\sin(nt)]_0^{2\Pi} + \frac{1}{2n}\int_0^{2\Pi}\sin(nt)dt) = 0$$

et

$$b_n(H) = \frac{1}{\Pi}\int_0^{2\Pi} \frac{\Pi - t}{2}\sin(nt)dt = \frac{1}{\Pi}([-\frac{(\Pi-t)}{2n}\cos(nt)]_0^{2\Pi} - \frac{1}{2n}\int_0^{2\Pi}\cos(nt)dt) = \frac{1}{n}$$

(b) H est continue sur $]0, 2\Pi[$ et prolongeable par continuité sur $[0, 2\Pi]$, de plus H est $2\Pi-$périodique $\Rightarrow$ H est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ d'aprés Parseval

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n(H)|^2 = \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi}|H(t)|^2dt = \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi}\frac{(\Pi-t)^2}{4}dt = \frac{\Pi^2}{12}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\Pi^2}{6}$

2. $|xe^{it}| < 1 \Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-(n+1)it} = e^{-it}\sum_{n=0}^{+\infty}(xe^{it})^n = e^{-it}\frac{1}{1-xe^{-it}} = \frac{1}{e^{it}-x}$$

$\Rightarrow \frac{1}{x-e^{it}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-(n+1)it}.$

3.

$$-\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\cos(n+1)t = Re(\frac{1}{x-e^{it}}) = Re[\frac{x-e^{-it}}{(x-\cos(t))^2+\sin^2(t)}] = \frac{x-\cos(t)}{x^2-2x\cos(t)+1}$$

4. $\forall x \in]-1, 1[$, $\sup_{u\in\overrightarrow{[0,x]}}|u^n\cos((n+1)t)| = |x^n|$, or $\sum_{n\geq 1}|x^n|$, converge $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 1} u^n\cos((n+1)t)$ converge normalement donc uniformément sur $\overrightarrow{[0,x]}$, d'autre part $\forall x \in]-1,1[$ et $\forall t \in \mathbb{R}$ $x^2 - 2x\cos(t) + 1 = (x-\cos(t))^2 + \sin^2(t) > 0 \Rightarrow$ $\int_0^x(\sum_{n=1}^{+\infty} u^n\cos((n+1)t))du = \sum_{n=0}^{+\infty}(\int_0^x u^n du)\cos((n+1)t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\cos((n+1)t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\cos(nt) = \int_0^x \frac{\cos(t)-u}{u^2-2u\cos(t)+1}du = -\frac{1}{2}\lg(x^2-2x\cos(t)+1) \Rightarrow$

$$-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\cos(nt) = \lg(x^2-2x\cos(t)+1).$$

5. (a) On sait que $\forall x \in]-1, 1[$ et $\forall t \in \mathbb{R}$ $x^2 - 2x\cos(t) + 1 > 0 \Rightarrow G_x$ est continue sur $\mathbb{R}$ $2\Pi-$ périodique et paire.

(b) On $\forall p \in \mathbb{N}$ $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n \cos(nt)\cos(pt)}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n \sin(nt)\sin(pt)}{n}$ converge normalement sur $[0, 2\Pi] \Rightarrow$

$$a_0(G_x) = \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi}(-\frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x\cos(t) + 1))dt = \frac{1}{2\Pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\int_0^{2\Pi}\cos(nt)dt = 0$$

et $\forall p \geq 1$
$a_p(G_x) = \frac{1}{\Pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\int_0^{2\Pi}\cos(nt)\cos(pt)dt =$
$\frac{1}{\Pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\frac{1}{2}\int_0^{2\Pi}\cos((n+p)t) + \cos((n-p)t)dt = \frac{x^p}{p}$
et G_x est paire, $b_p(G_x) = 0$.

(c) G_x est continue sur $\mathbb{R}$ $2\Pi-$ périodique et paire d'aprés Parseval ona:
$\frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi}|G_x(t)|^2dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n^2} \Rightarrow$
$\frac{1}{8\Pi}\int_0^{2\Pi}|(\ln(x^2 - 2x\cos(t) + 1))|^2dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n^2} \Rightarrow$
$\int_0^{2\Pi}(\ln(x^2 - 2x\cos(t) + 1))^2dt = 4\Pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n^2}$.

6. On a: $\sum_{n\geq 1}\frac{x^{2n}}{n^2}$ converge normalement sur $[0,1]$ et $\forall n \geq 1$, $\lim_{x\to 1}\frac{x^{2n}}{n^2} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ $\lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\Pi^2}{6}$.

7. Soient $(t,x) \in]0,\Pi[\times]-1,1[$

$$\cos^2(\frac{t}{2}) = \frac{4\cos^2(\frac{t}{2})\sin^2(\frac{t}{2})}{4\sin^2(\frac{t}{2})} = \frac{\sin^2(t)}{4\sin^2(\frac{t}{2})} \leq \frac{x^2 - 2x\cos(t) + 1}{2 - 2\cos(t)} = \frac{(x-\cos(t))^2 + \sin^2(t)}{4\sin^2(\frac{t}{2})} \leq \frac{4}{4\sin^2(\frac{t}{2})}$$

8. $\forall t \in]0,\Pi[$, $\frac{t}{2} \in]0,\frac{\Pi}{2}[$, $0 < \cos^2(\frac{t}{2}) \Rightarrow \ln(\cos^2(\frac{t}{2})) \leq \ln(\frac{x^2-2x\cos(t)+1}{2-2\cos(t)}) \leq \ln(\frac{1}{\sin^2(\frac{t}{2})}) \Rightarrow$ $|\ln(\frac{x^2-2x\cos(t)+1}{2-2\cos(t)})| \leq \max(2|\ln(\sin(\frac{t}{2}))|, 2|\ln(\cos(\frac{t}{2}))|) \leq -2(\ln(\sin(\frac{t}{2})) + \ln(\cos(\frac{t}{2}))$ Donc $|\ln(\frac{x^2-2x\cos(t)+1}{2-2\cos(t)})| \leq 2|\ln(\frac{1}{2}\sin(t))|$.

9. (a) $\forall t \in]0,2\Pi[$, $\frac{t}{2} \in]0,\Pi[$ $\sin(\frac{t}{2}) > 0$ au voisinage de 0, $G^2(t) = \ln^2(2(\frac{t}{2} + \circ(t))) = 2\ln(t + \circ(t)) = \circ(\frac{1}{\sqrt{t}})$ et au voisinage de 2Π $G^2(t)$ est intégrable au voisinage de 2Π ssi $G^2(h + 2\Pi)$ est intégrable au voisinage de 0 $G^2(h+2\Pi) = \ln^2(-\sin(\frac{h}{2}))$ avec $h < 0$ donc G^2 est intégrable sur $]0,2\Pi[$.
$\int_0^{2\Pi}|G_x(t) - G(t)|^2dt = \int_0^{\Pi}|G_x(t) - G(t)|^2dt + \int_{\Pi}^{2\Pi}|G_x(t) - G(t)|^2dt$ un changement variable dans la deuxiéme intégrale $\Pi - t = h$ et $v = -h$ on aurra
$\int_0^{2\Pi}|G_x(t) - G(t)|^2dt = 2\int_0^{\Pi}|G_x(t) - G(t)|^2dt$ et $\lim_{x\to 1^-}|G_x(t) - G(t)| = 0$ et $|G_x(t) - G(t)|^2 \leq |\ln(\frac{1}{2}\sin(t))|^2 = \circ(\frac{1}{\sqrt{t}})$, intégrable au voisinage de 0 meme raisonement au voisinage de Π d'ou le resultat.

(b) Ona: $\int_0^{2\Pi}|G_x(t) - G(t)|^2dt = \int_0^{2\Pi}G_x^2(t)dt - 2\int_0^{2\Pi}G_x(t)G(t)dt + \int_0^{2\Pi}G^2(t)dt$ en raisonnant comme en (a) et en utilisant la domination $|G_x(t)G(t)| \leq |\ln(2\sin(\frac{t}{2})||\ln(2\sin(\frac{t}{2})) + \ln(\frac{1}{2}\sin(t))| = \circ(\frac{1}{\sqrt{t}})$ et $\lim_{x\to 1^-}(G_x(t)G(t)) = G^2(t)$ on aura $\lim_{x\to 1^-}\int_0^{2\Pi}G_x(t)G(t)dt = \int_0^{2\Pi}G^2(t)dt$ donc

$$\int_0^{2\Pi}G^2(t)dt = \lim_{x\to 1^-}\int_0^{2\Pi}G_x^2(t)dt = \Pi\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n^2} = \Pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\Pi^3}{6},$$

d'ou $\int_0^{2\Pi}|\ln(2\sin(\frac{t}{2}))|^2dt = \frac{\Pi^3}{6}$.

Partie -II-

1. Soit g une solution constante qui vaut a de l'equation E_p on aurra $a = pa$ $\Rightarrow a = 0$, puisque $p \geq 2$.

2. (a) $\widetilde{f}(t+2\Pi) = \sum_{k=0}^{p-1} f(t+2\Pi+\frac{2k\Pi}{p}) = \widetilde{f}(t)$ et $\widetilde{f}$ est la somme des fonctions continues donc continue.
   $f_p(t+2k\Pi) = f(p(t+2k\Pi)) = f(pt) = f_p(t)$ et f_p est la composé des fonctions continues donc continue.

   (b) $\forall n \in \mathbb{Z}$
   -$C_{np}(\widetilde{f}) = \frac{1}{2\Pi}\sum_{k=0}^{p-1}\int_0^{2\Pi} f(t+\frac{2k\Pi}{p})e^{-inpt}dt$ un changement de variable on pose $u = t + \frac{2k\Pi}{p}$ on aurra

   $$C_{np}(\widetilde{f}) = \frac{1}{2\Pi}\sum_{k=0}^{p-1}\int_{\frac{2k\Pi}{p}}^{2\Pi+\frac{2k\Pi}{p}} f(u)e^{-inp(u-\frac{2k\Pi}{p})}du = \sum_{k=0}^{p-1} C_{np}(f) = pC_{np}(f)$$

   -$C_{np}(f_p) = \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi} f_p(t)e^{-inpt}dt$ un changement de variable on pose $u = pt$ on aurra

   $$C_{np}(f_p) = \frac{1}{2p\Pi}\int_0^{2p\Pi} f(u)e^{-inu}du = \frac{1}{2p\Pi}\sum_{k=0}^{p-1}\int_{2k\Pi}^{2(k+1)\Pi} f(u)e^{-inu}du = C_n(f).$$

3. (a) g solution de $(E_p) \Rightarrow g(pt) = \sum_{k=0}^{p-1} g(t+\frac{2k\Pi}{p}) \Rightarrow pg'(pt) = \sum_{k=0}^{p-1} g'(t+\frac{2k\Pi}{p}) \Rightarrow g'(pt) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} g'(t+\frac{2k\Pi}{p})$.

   (b) $pg'(pt) = \widetilde{g'}(t) = pg'_p(t)$ or $\forall n \in \mathbb{Z}$
   $C_n(g') = C_{np}(g'_p) = C_{np}(\frac{\widetilde{g'}}{p}) = \frac{1}{p}C_{np}(\widetilde{g'}) = C_{np}(g') \Rightarrow C_n(g') = C_{np}(g')$.

   (c) $C_0(g') = \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi} g'(t)dt = \frac{1}{2\Pi}(g(2\Pi) - g(0)) = 0$

   (d) Soit $n \in \mathbb{Z}^*$
      i. $\forall r \in \mathbb{N}$ $C_n(g') = C_{np}(g') = C_{np^2}(g') = C_{np^r}(g')$
      ii. g' est continue $2\Pi-$périodique donc $\lim_{r\to+\infty} C_{np^r}(g') = 0 \Rightarrow C_n(g') = 0$.

   (e) Les coefficient de Fourier exponentiels de g' sont nulle d'aprés Parseval g' est nulle .

   (f) g est constante est solution de E_p, d'aprés 1) partie II) g est nulle.

4. (a) $\sum_{n\geq 0}\frac{\sin(2^n t)}{2^{(n+1)}}$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto \frac{\sin(2^n t)}{2^{(n+1)}}$ est continue , $2\Pi-$ périodique car $\frac{\sin(2^n(t+2\Pi))}{2^{(n+1)}} = \frac{\sin(2^n t)}{2^{(n+1)}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ donc g continue $2\Pi-$périodique.

   (b) $g(\frac{t}{2}) + g(\frac{t+2\Pi}{2}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2^n\frac{t}{2}) + \sin(2^n\frac{(t+2\Pi)}{2})}{2^{(n+1)}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2^{n-1}t)}{2^{(n+1)}} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2^{n-1}t + 2^n\Pi)}{2^{(n+1)}} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2\frac{\sin(2^{n-1}t)}{2^{(n+1)}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2^{n-1}t)}{2^n} = g(t)$

   (c) $g(0) = 0$, $g(\frac{\Pi}{2}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2^{n-1}\Pi)}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$

   (d) $g(0) \neq g(\frac{\Pi}{2}) \Rightarrow g$ n'est pas constante.

   (e) g est une solution de E_2 qui n'est pas constante donc g n'est pas C^1.

$\boxed{\textbf{Partie -III-}}$

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $p \geq 2$,
   (a) $C_n(g) = \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi} g(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\Pi}\sum_{k=0}^{p-1}\int_0^{2\Pi} g(\frac{t+2k\Pi}{p})e^{-int}dt$
   $= \sum_{k=0}^{p-1}\int_{\frac{2k\Pi}{p}}^{\frac{2(k+1)\Pi}{p}} g(u)e^{-in(pu-2k\Pi)}pdu$ un changement de variable, ($u = \frac{t+2k\Pi}{p}$)
   $C_n(g) = pC_{np}(g)$.
   (b) i. Pour $n = 0$ $C_0(g) = pC_0(g)$ et $p \geq 2 \Rightarrow C_0(g) = 0$.
   Pour $n = 1$ $C_p(g) = \frac{C_1(g)}{p}$.
   Pour $n = -1$ $C_p(g) = \frac{C_{-1}(g)}{p}$.
   ii. $a_0 = C_0(g) = 0$, $a_p = C_p(g) + C_{-p}(g) = \frac{C_1(g)+C_{-1}(g)}{p} = \frac{\alpha}{p}$ avec $\alpha = C_1(g) + C_{-1}(g)$.
   $b_p = i(C_p(g) - C_{-p}(g)) = \frac{i}{p}(\frac{C_1(g)-C_{-1}(g)}{p}) = \frac{\beta}{p}$ avec $\beta = i(C_1(g) - C_{-1}(g))$.

2. Puisque $g - \alpha G_x - \beta H$ continue par morceaux $2\Pi-$ périodique d'aprés Parseval donc $\frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi}|g(t) - \alpha G_x(t) - \beta H(t)|^2 dt = [\frac{|a_0(g-\alpha G_x-\beta H)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(g - \alpha G_x - \beta H)|^2 + |b_n(g - \alpha G_x - \beta H)|^2) = \frac{1}{2}|\alpha|^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-x^n)^2}{n^2}$.

3. $\forall x \in [0,1]$ et $\forall n \geq 1$ ona: $\frac{|1-x^n|^2}{n^2} \leq \frac{4}{n^2} \Rightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{(1-x^n)^2}{n^2}$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$ et $\forall n \geq 1$ $\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x^n)^2}{n^2} = 0$ $\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-x^n)^2}{n^2} = 0$.

4. En utulisant l'hypothése de domination faite a G_x dans la question 6) parti I) on aurra $\lim_{x\to 1^-}\int_0^{2\Pi}|g(t) - \alpha G_x(t) - \beta H(t)|^2 dt = \int_0^{2\Pi}|g(t) - \alpha G(t) - \beta H(t)|^2 dt$.

5. $\int_0^{2\Pi}|g(t) - \alpha G(t) - \beta H(t)|^2 dt = \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{2}|\alpha|^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-x^n)^2}{n^2} = 0$.

6. $g - \alpha G - \beta H$ est continue sur $]0, 2\Pi[$ et $\int_0^{2\Pi}|g(t) - \alpha G(t) - \beta H(t)|^2 dt = 0 \Rightarrow g - \alpha G - \beta H = 0$.

7. Supposons que $\alpha \neq 0$ g est continue en $0 \Rightarrow |g(0)| = \lim_{t\to 0^+}|g(t)| = \lim_{t\to 0^+}|\frac{\alpha}{2}G(t) + \beta H(t)| = \infty$ absurd .
   $\Rightarrow g = \beta H$ supposons que $\beta \neq 0$ $g(0) = g(2\Pi) = \beta\lim_{t\to 0^+}|H(t)| = \beta\frac{\Pi}{2} = \beta\lim_{t\to(2\Pi)^-}|H(t)| = -\beta\frac{\Pi}{2} \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow g = 0$ sur $]0, 2\Pi[$ et comme g est continue $2\Pi-$ périodique sur $\mathbb{R} \Rightarrow g = \widetilde{0}$.

Partie -IV-

1. $f_n(x) = \ln(\frac{\Gamma_{n+1}(x)}{\Gamma_n(x)}) = \ln(\frac{(n+1)^x}{n^x}\frac{1}{\frac{x}{n+1}+1}) = -\ln(1 + \frac{x}{(n+1)}) - x\ln(1 - \frac{1}{(n+1)})$.

2. $f_n(x) = -[\frac{x}{n+1} + o(\frac{1}{(n+1)^2})] - x[\frac{1}{n+1} + o(\frac{1}{(n+1)^2})] = o(\frac{1}{(n+1)^2}) \Rightarrow \sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
   f_n est de classe C^2 et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $f_n'(x) = -\ln(1 - \frac{1}{(n+1)}) - \frac{1}{n+1}(1 + \frac{x}{n+1})^{-1}$ et

   $f_n''(x) = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{(1+\frac{x}{n+1})^2} \geq 0$ donc f_n' est croissante et $f_n'(0) = -\ln(1 - \frac{1}{(n+1)}) - \frac{1}{n+1}$.
   Soit $g(x) = -\ln(1-x) - x$ avec $x \in]0, 1[$ ona $g'(x) = \frac{x}{1-x} > 0 \Rightarrow g$ est croissante et $g(0) = 0$ donc $g \geq 0$, par la suite f_n' est croissante et positive .

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n'(x)| = f_n'(b) = -(-\frac{1}{n+1} + \circ(\frac{1}{(n+1)^2})) - \frac{1}{n+1}(1+\frac{b}{n+1})^{-1} = \circ(\frac{1}{(n+1)^2})$$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. $\sum_{n=1}^{N} f_n(x) = \ln(\Gamma_{N+1}(x)) - \ln(\Gamma_1(x))$ or $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers une fonction de classe C^1 notée $f \Rightarrow (\ln(\Gamma_N))_N$ convrge simplement vers g sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $g(x) = f(x) + \ln(\frac{1}{x(x+1)})$, $\forall x > 0$, donc $(\Gamma_N)_N$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers une fonction de classe C^1 notée $\Gamma = \exp(g)$.

4. (a) $\forall x > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ona:
   $\Gamma_{n+1}(x+1) = \frac{n^{x+1} n! x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)} = \frac{nx}{x+n+1}\Gamma_n(x)$
   (b) $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = \lim_{n\to+\infty} \Gamma_{n+1}(x+1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{x+n+1}\Gamma_n(x) = x\Gamma(x)$.

5. (a) $\forall x > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ona:
   $\Gamma_n(\frac{x}{2})\Gamma_n(\frac{x+1}{2}) = \frac{n^{\frac{x}{2}} n!}{\frac{x}{2}(\frac{x}{2}+1)(\frac{x}{2}+2)\cdots(\frac{x}{2}+n)} \frac{n^{\frac{x+1}{2}} n!}{\frac{x+1}{2}(\frac{x+1}{2}+1)(\frac{x+1}{2}+2)\cdots(\frac{x+1}{2}+n)} =$
   $\frac{n^x\sqrt{n}(n!)^2}{\frac{1}{2^n}x(x+2)(x+4)\cdots(x+2n)} \frac{1}{\frac{1}{2^{n+1}}(x+1)(x+3)(x+5)\cdots(x+2n+1)} =$
   $\frac{2^{2n+2}n^x\sqrt{n}(n!)^2(2n)!(2n)^{2x}}{(2n)!(2n)^{2x}x(x+1)(x+2)\cdots(x+2n)(x+2n+1)} =$
   $\frac{2^{2n+2}n^x\sqrt{n}(n!)^2\Gamma_{2n}(x)}{(2n)^x(2n)!(x+2n+1)} =$
   $\frac{2^{2n+2}\sqrt{n}(n!)^2\Gamma_{2n}(x)}{(2)^x(2n)!(x+2n+1)}$.
   (b)
$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} \sim \frac{2\Pi n n^{2n}e^{-2n}}{\sqrt{4n\Pi}(2n)^{2n}e^{-2n}} \sim \frac{\sqrt{n\Pi}}{2^{2n}}$$
   $\Rightarrow$
$$\frac{2^{2n+2}\sqrt{n}(n!)^2}{(2n)!(2)^{2x}(x+2n+1)} \sim 2^{1-x}\sqrt{\Pi}$$
   $\Rightarrow$
$$\Gamma_n(\frac{x}{2})\Gamma_n(\frac{x+1}{2}) \sim 2^{1-x}\sqrt{\Pi}\Gamma_{2n}(x)$$
   d'ou $\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\Pi}}\Gamma(\frac{x}{2})\Gamma(\frac{x+1}{2})$.

6. (a) Ona: $\forall x > 0$ $g(x+2\Pi) = g(x)$ et
   $\ln(\Lambda(\frac{x+2\Pi}{2\Pi})) - \ln(\Gamma(\frac{x+2\Pi}{2\Pi})) = \ln(\frac{\Lambda(\frac{x+2\Pi}{2\Pi})}{\Gamma(\frac{x+2\Pi}{2\Pi})}) = \ln(\frac{\Lambda(\frac{x}{2\Pi}+1)}{\Gamma(\frac{x}{2\Pi}+1)}) = \ln(\frac{\Lambda(\frac{x}{2\Pi})}{\Gamma(\frac{x}{2\Pi})}) = \ln(\Lambda(\frac{x}{2\Pi})) - \ln(\Gamma(\frac{x}{2\Pi}))$
   donc $\forall x > 0$ $g(x) = \ln(\Lambda(\frac{x}{2\Pi})) - \ln(\Gamma(\frac{x}{2\Pi}))$.

   (b) D'autre part $\forall x > 0$, $g(x) = \ln(\frac{\Lambda(\frac{x}{2\Pi})}{\Gamma(\frac{x}{2\Pi})}) = \ln(\frac{\frac{p^{\frac{2x-1}{2}}}{(\sqrt{2\Pi})^{p-1}}\prod_{k=0}^{p-1}\Lambda(\frac{\frac{x}{2\Pi}+k}{p})}{\frac{p^{\frac{2x-1}{2}}}{(\sqrt{2\Pi})^{p-1}}\prod_{k=0}^{p-1}\Gamma(\frac{\frac{x}{2\Pi}+k}{p})}) =$
   $\sum_{k=0}^{p-1}[\ln(\Lambda(\frac{x+2k\Pi}{2\Pi}))-\ln(\Gamma(\frac{x+2k\Pi}{2p\Pi}))] = \sum_{k=0}^{p-1} g(\frac{x+2k\Pi}{2\Pi})$ et l'application $x \mapsto \sum_{k=0}^{p-1} g(\frac{x+2k\Pi}{2\Pi})$ est $2\Pi-$ périodique en effet $\sum_{k=0}^{p-1} g(\frac{x+2\Pi+2k\Pi}{2\Pi}) = \sum_{k=0}^{p-1} g(\frac{x+2(k+1)\Pi}{2\Pi}) = \sum_{k=1}^{p} g(\frac{x+2k\Pi}{2\Pi}) =$
   $\sum_{k=1}^{p-1} g(\frac{x+2k\Pi}{2\Pi}) + g(\frac{x+2p\Pi}{2\Pi}) = \sum_{k=0}^{p-1} g(\frac{x+2k\Pi}{2\Pi})$,
   d'ou $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sum_{k=0}^{p-1} g(\frac{x+2k\Pi}{2\Pi})$.
   (c) D'aprés question 4) partie III une solution g de E_p continue $2\Pi-$ périodique est nulle donc $\forall x > 0$, $\ln(\Lambda(\frac{x}{2\Pi})) = \ln(\Gamma(\frac{x}{2\Pi}))$ par la suite $\Lambda = \Gamma$.